07/03/16.

<u>Κριτήριο Riemann</u>: $A \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο, $f: A \to \mathbb{R}$ φραγμένη.
Τότε: f ολοκληρώσιμη στο $A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists P \in \mathcal{P}(A))$:
$: |U(f,P) - L(f,P)| < \varepsilon$

<u>Απόδ</u> ($\Rightarrow$) Έστω ($\varepsilon > 0$). Τότε εξ' ορισμού $\exists P', P'' \in \mathcal{P}(A)$:

$$U(f,P') < U_f + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$L(f,P'') > L_f - \frac{\varepsilon}{2}$$

Έστω P κοινή εκλέπτυνση των P', P'', τότε (από προηγ. πρόταση)

$$U(f,P) - L(f,P) \leq U(f,P') - L(f,P'') < U_f + \frac{\varepsilon}{2} - \left(L_f - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Αφού $L_f \leq U_f$ και από τον ορισμό τους έχουμε:

$$0 \leq U_f - L_f \leq U(f,P') - L(f,P'), \quad \forall P' \in \mathcal{P}(A).$$

Από το δεξί μέρος της αποδεικτέας ισοδυναμίας προκύπτει:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ 0 \leq U_f - L_f < \varepsilon \Rightarrow \boxed{U_f = L_f}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Υπάρχει και μία ειδικότερη μορφή του κριτηρίου Riemann: Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο, $f: A \to \mathbb{R}$ φραγμένη.
Τότε: f ολ/μη $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \mathcal{P}(A))\ \|P\| < \delta : U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$

<u>Παρατήρηση</u>: Υπάρχει και ένας διαφορετικός ορισμός (αλλά ισοδύναμος) του ολ/τος (μιας φραγμένης $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, κλειστό ορθογώνιο):

<u>Ορισμός</u>: Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο, $f: A \to \mathbb{R}$ φραγμένη.
Η f λέγεται ολ/μη αν $\exists y \in \mathbb{R}$ με $y = \int_A f$ έτσι ώστε:
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \mathcal{P}(A))$ με $\|P\| < \delta$ και κάθε συλλογή σημείων $\xi_P := (\xi_S)_{S \in S_P}$ με $\xi_S \in S$ να ισχύει: $\left|\sum_{S \in S_P} f(\xi_S) v(S) - \int_A f\right| < \varepsilon$.
Το $\sum_{S \in S_P} f(\xi_S) v(S)$ λέγεται άθροισμα Riemann.

<u>Ιδιότητες Ολ/τος</u>: Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ κλ. ορθ. $f: A \to \mathbb{R}$ φραγμ. $g: A \to \mathbb{R}$, f, g ολ/μες. Τότε ισχύουν:

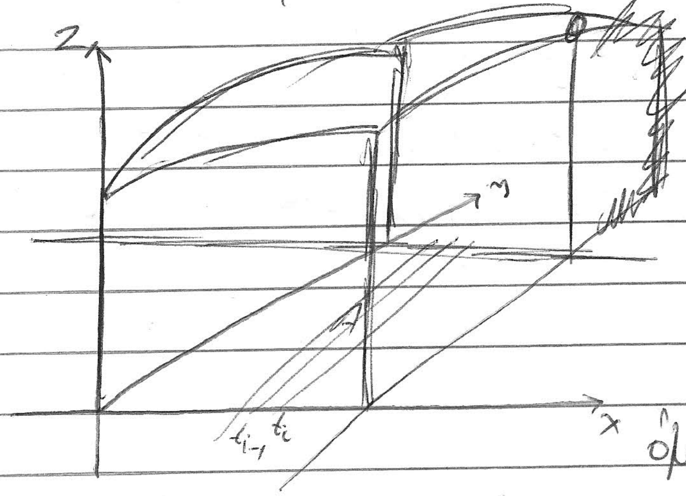
- (α) $f+g$ ολ/μη και $\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$
- (β) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: (αf) ολ/μη και: $\int_A \alpha f = \alpha \int_A f$

•(γ) $f \le g \Rightarrow \int_A f \le \int_A g$ •(δ) $|f|$ ολ/μη και $\left|\int_A f\right| \le \int_A |f|$

•(ε) $f \cdot g$ ολ/μη.

Επίσης ισχύει: Πρόταση: $A \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο, $f: A \to \mathbb{R}$ (ολ/μη) και $P \in \mathcal{P}(A)$ διαμέριση. Τότε f ολ/μη $\Leftrightarrow$ $f|_S$ ολ/μη $\forall S \in S_P$ και $\int_A f = \sum_{S \in S_P} \underbrace{\int_S f|_S}_{\int_S f}$

Ένα απ' τα 2 Βασικότερα Θεωρήματα για συναρτήσεις πολλών μεταβλ. (ως προς την ολοκλ.) είναι το Θεωρ. Fubini.



$$\int_A f(x,y)\,d(x,y) = \sum_{i=1}^{k} \int_{[t_{i-1},t_i]\times[0,1]} f(x,y)\,d(x,y)$$

όπου $A = [0,1]\times[0,1]$ και $\{0, t_1, \dots, t_{k-1}, t_k = 1\}$ μια διαμέριση του $[0,1]$

όμως $\sum_{i=1}^{k} \int_{[t_{i-1},t_i]\times[0,1]} f(x,y)\,d(x,y) \approx \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\left(\int_0^1 f(x_i,y)\,dy\right)}_{g(x_i)} (t_i - t_{i-1})$

$$\approx \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right) dx$$

Δηλ. ότι για "καλές" (π.χ. συνεχείς) συναρτήσεις $f: [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ ολ/μες ισχύει:

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)\,d(x,y) \underset{=}{\approx} \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right) dx.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Fubini (SOS): $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ κλειστά ορθ. και $f: A\times B \to \mathbb{R}$ ολ/μη. Τότε οι συναρτήσεις $A \ni \bar{x} \mapsto L_{f(\bar{x}_i)} \in \mathbb{R}$, $A \ni \bar{x} \mapsto U_{f(\bar{x}_i)} \in \mathbb{R}$ όπου $L_{f(\bar{x}_i)}$, $U_{f(\bar{x}_i)}$ κάτω κ' άνω ολ/τα των συναρτήσεων $B \ni \bar{y} \mapsto f(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{R}$ είναι ολ/μες και ισχύει:

$$\int_{A\times B} f = \int_A L_{f(\bar{x}_i)}\,d\bar{x} = \int_A U_{f(\bar{x}_i)}\,d\bar{x}$$